Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire

Référence : Pommellet p.315.

> *Théorème :*
> Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $A : I \to \mathscr{M}_m(\mathbb{K})$ continue, $B : I \to \mathbb{K}^m$ continue. Pour tout $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}^m$, il existe une unique solution de (E) : $\frac{dY}{dt} = A(t)Y + B(t)$ définie sur I et telle que $Y(t_0) = y_0$

Preuve :

Existence :
On écrit l'équation sous forme intégrale :
(Y vérifie (E) et $Y(t_0) = y_0$) $\Leftrightarrow$ $\left(Y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} [A(u)Y(u) + B(u)]\,\mathrm{du}\right)$
On pose alors la suite de fonctions :

$$\begin{cases} Y_0(t) = y_0 \\ Y_{n+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} [A(u)Y_n(u) + B(u)]\,\mathrm{du} \end{cases}$$

Elle est bien définie car les opérateurs $A(t)$ sont définis sur $\mathbb{K}^m$ tout entier.
Si I est compact :

Notons $\alpha = \sup_{t \in I} \||A(t)\||$ et $\beta = \sup_{t \in I} \|B(t)\|$.
Montrons par récurrence que pour entier naturel n et tout $t \in I$:

$$\|Y_n(t) - Y_{n-1}(t)\| \leq (\alpha\|y_0\| + \beta).\frac{\alpha^{n-1}}{n!}|t - t_0|^n \text{ pour } t \geq t_0$$ [1]

- Pour $n = 1$: clair
- Hérédité : On suppose que c'est vrai à un rang $n > 1$. On a :

$$\begin{aligned} \|Y_{n+1}(t) - Y_n(t)\| &= \|\int_{t_0}^{t} A(u)(Y_n(u) - Y_{n-1}(u))\,\mathrm{du}\| \\ &\leq \alpha \int_{t_0}^{t} (\alpha\|y_0\| + \beta).\frac{\alpha^{n-1}}{n!}|u - t_0|^n\,\mathrm{du} \end{aligned}$$

d'où le résultat.

Prenons $L = long(I)$, alors : $\|Y_n - Y_{n-1}\|_\infty \leq (\alpha\|y_0\| + \beta).\frac{\alpha^{n-1}}{n!}L^n$, pour la norme de la convergence uniforme définie sur l'espace des fonctions continues définies sur I.

Il en résulte que la série de fonctions $\sum_{n=1}^{N} Y_n - Y_{n-1}$ est normalement convergente. Comme $(\mathscr{C}^0(I, \mathbb{K}^m), \|.\|_\infty)$ est complet, la série est donc uniformément convergente.
Il existe donc $Y \in \mathscr{C}^0(I, \mathbb{K}^m)$, telle que $\lim_{N \to +\infty} \sum_{n=1}^{N} Y_n - Y_{n-1} = \lim_{N \to +\infty} Y_N - Y_0 = Y$. La suite $(Y_n)_n$ converge uniformément sur I vers une fontion $\tilde{Y}$ [2]

Par convergence uniforme sur un intervalle compact, il est possible de passer à la limite dans l'intégrale de définition de la suite récurrente : $\tilde{Y}$ **est solution de** (E)**.**

1. La preuve est identique si $t \leq t_0$
2. Disons que $\tilde{Y} = Y + Y_0$

Si I est quelconque :

On sait que (Y_n) converge uniformément sur tout compact et comme tout point de I est intérieur à un compact alors on peut se ramener au cas précédent. Il y a existence d'une solution.

Unicité :
On se ramène au cas où I est un compact et on prend deux solutions Y et Z de (E), avec $Y(t_0) = Z(t_0) = y_0$.
Par récurrence sur n,
$\|Y(t) - Z(t)\| \leq \dfrac{\alpha^n}{n!}|t - t_0|\|Y - Z\|_\infty \to 0 \quad \square$